数理解析研究所講究録
285巻 1976年 96-102

Resistant BIB designについて

愛媛大 教育　大森博之

§1 序

BIB designは一般的なモデルのもとで2つの"balanced"という性質をもっている。 i.e. (i) variance balanced: 処理効果のすべての normalized estimable linear function が同一の分散をもつ。 (ii) pairwised balanced: 処理のすべての対が同一のblockに一定回数だけ施こされている。

Hedayat & John [2] はBIB designにおいて、いくつかのある処理があって、それらが施こされているすべての experimental units を取り除いた残りのdesignが、(i), (ii)の性質を保存している事を要求する立場から locally resistant BIB design, globally resistant BIB design 及び susceptible BIB design なるものを提起し、特に位数1の locally resistant 及び

globally resistant BIB design の特徴付けを行なっている。

この特徴付けをもとにして，位数 n の locally resistant BIB design の若干の例を述べるのが，この講演の目的である。

§2 定義及び諸結果

D を処理の集合 Ω 上の BIB (v, b, r, k, λ) design とし，$\Omega \supset L$ $(|L| = n \leqq v-2)$ とする。

D から，L に属する処理が施されているすべての experimental units を取り除いて出来る design を D_L とする。

[定義]　D：位数 n の locally resistant BIB design

$\Leftrightarrow$ $\Omega \supset {}^{\exists}L$ $(|L| = n)$ s.t. D_L variance balanced

[定義]　D：位数 n の globally resistant BIB design

$\Leftrightarrow$ $\Omega \supset {}^{\forall}L$ $(|L| = n)$, D_L variance balanced

[定義]　D：susceptible BIB design

$\Leftrightarrow$ $\Omega \supset {}^{\nexists}L$ s.t. D_L variance balanced

位数 1 の場合について以下のような特徴付けが Hedayat と John [2] によってなされている。

[定理 1] D が処理 α に関して locally resistant BIB design となる為の必要十分条件は D_1（従って D_2）が BIB design となる事である。
ここに D_2 は処理 α が施されていないすべての block から成る design で，又 D_1 は $D_1 = D_{\{\alpha\}} - D_2$，

[定理 2] D が位数 1 の globally resistant BIB design となる為の必要十分条件は D が 3－design となる事である。

定理 1 によって，位数 1 の locally resistant BIB design（ある場合には globally resistant も）を構成するには，BIB design D_1 があって，D_1 のすべての block に新しい処理 α を付け加え（その design を $\overline{D}_1$ とする。）$D = \overline{D}_1 \cup D_2$ が BIB design となるような BIB design D_2 が存在するかどうかを調べればよい。 もしこのような BIB design D_2 が存在するとき，D_1 は embeddable という。

[定理 3]　$D_1(v, b, r, k, \lambda)$ が embeddable である為の必要条件は $(k+1) \mid b(v-k)$ である。
更にこのとき D_2, D はそれぞれ

$D_2(v,\ b(v-k)/k+1,\ b-r,\ k+1,\ r-\lambda)$,

$D(v+1,\ b(v+1)/k+1,\ b,\ k+1,\ r)$ である。

上の定理の必要条件が十分条件であるかどうか未知である。又上記の D において
$v+1 \geqq 2(k+1)$ としてよく，従って $v \geqq 2k+1$ と仮定してよい。

§3　Examples

Example (a)　$D_1(2k+1, b, r, k, \lambda)$ の場合。
D_2 は $D_2(2k+1, b, b-r, k+1, r-\lambda)$ となり これは D_1 の complementary design の parameters と一致する。
次の結果は Hedayat & John [2] による。

[定理 4]　$D = \bar{D}_1 \cup D_2$ は位数 1 の globally resistant BIB design となる。（ i.e D は 3-$(2k+2, k+1, \lambda)$ design）。但し，D_2 は D_1 の complementary design。

$v=2k+1$ となる design の例として $D_1(4t+3,\ 4t+3,\ 2t+1,\ 2t+1,\ t)$ があるが、この design については次の事がいえる。

［定理 5］ $D_1(4t+3,\ 4t+3,\ 2t+1,\ 2t+1,\ t)$ が存在するとき、$D=D_1\cup D_2$ は $(4t+4,\ 8t+6,\ 4t+3,\ 2t+2,\ 2t+1)$ なる BIB design で、これは位数 $2t+2$ の locally resistant BIB design となる。但し D_2 は D_1 の complementary design。

Example (b) $D_1(2k+2,\ b,\ r,\ k,\lambda)$ の場合。

D_1 が embeddable である為の必要条件から

$D_1(2k+2,\ m(k+1),\ mk/2,\ k,\ mk(k-1)/2(2k+1))$,

$D_2(2k+2,\ m(k+2),\ m(k+2)/2,\ k+1,\ mk(k+2)/2(2k+1))$

となる。これより

［定理 6］ $D_1(2k+2,\ m(k+1),\ mk/2,\ k,\ mk(k-1)/2(2k+1))$, $D_2(2k+2,\ m(k+2),\ m(k+2)/2,\ k+1,\ mk(k+2)/2(2k+1))$ の存在は位数 1 の locally resistant BIB design $D(2k+3,\ m(2k+3),\ m(k+1),\ k+1,\ mk/2)$ の存在を意味する。

ただし m は (イ)： $k=6t+3$ 又は $6t+5$ のとき

$m = 2(2k+1)n$, (ロ): $k = 6t+1$ のとき
$m = 2(4t+1)n$, (ハ): $k = 6t$ 又は $6t+2$ のとき
$m = (2k+1)n$, (ニ): $k = 6t+4$ のとき $m = (4t+3)n$.

[系] 定理6の D_1, D_2 が存在するとき
$3-(2k+4,\ k+2,\ mk/2)$ design が存在する。

(注意) 定理6の D_1, D_2 及びそれらの complementary design の結合行列を各々 N_1, N_2, N_1^c, N_2^c とするとき，新しい処理 x, y をつけ加え，結合行列 N^* をもつ design D^* は $\{x, y\}$ に関して fully locally resistant BIB design [4] である。ここに

$$N^* = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 1\cdots 1 & 1\cdots 1 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\ 1\cdots 1 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 & 1\cdots 1 \\ N_1 & N_2 & N_1^c & N_2^c \end{array}\right] \begin{array}{l} \longleftarrow \text{処理 } x \\ \longleftarrow \quad 〃 \ y \\ \\ \end{array}$$

さらに定理6の D_1 において，(イ)で $n = 1$ の場合，D_1 は位数 $2k+2$ の $k-1$ 個の mutually orthogonal latin squares を用いて構成出来る[3]が，(ロ)，(ハ)，(ニ)の一般的な構成方法は出来ていないようである。

参考文献

[1] R.C. Bose (1939) On the construction of balanced incomplete block designs. Ann. of Eugenics, 9 353–399

[2] A. Hedayat & P.W.M. John (1974) Resistant and susceptible BIB designs. Ann. Statist. 2, 148–158.

[3] J. F. Lawless (1971) Note on a family of BIBD's and sets of mutually orthogonal latin squares. Jour. Comb. Theory 11 101–105.

[4] B.M. Most (1975) Resistance of Balanced Incomplete Block Designs Ann. Statist. 3, 1149–1162